| LYCEE BOUMERDES | Devoir de Synthèse N°1 | $4^{ème}$ Sc 1&2 |
|---|---|---|
| Le Mercredi 24/01/2018 | MATHEMATIQUES | Durée : 2 H |
| BRAIEK KHALIFA | | |

« Rien ne sert de courir, il faut partir à point »

## *Exercice N°1 (3pts)*

*I°)*

| |
|---|
| Cet exercice est constitué de questions à choix multiples. Le candidat reproduira sur sa copie soigneusement la lettre désignant la bonne réponse et le texte de celle-ci |

1) Soit $f$ la bijection définie de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0:1]$ par $f(x) = \sin x$.

Alors $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ est égal à :

a-) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . b-) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . c-) $\frac{-2}{\pi\sqrt{3}}$

2°) Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^n(x-2)^{n+1}(x-3)^{n+2}$ ; $n \in \mathbb{N}^*$

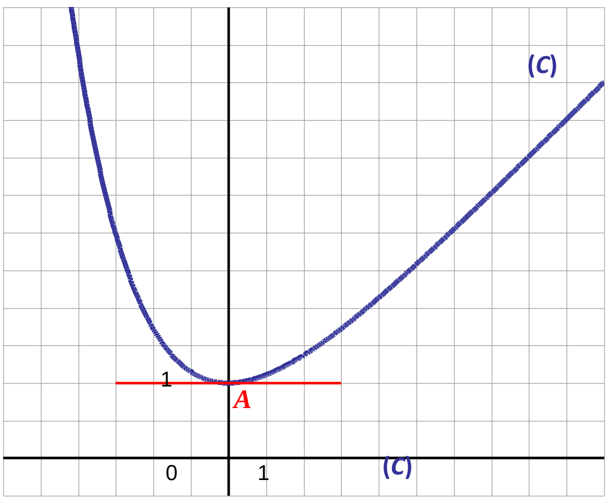
Alors la courbe représentative de $f$ admet :

a-) Au moins deux tangentes horizontales.

b-) Au moins trois tangentes horizontales

c-) Admet une seule tangente horizontale.

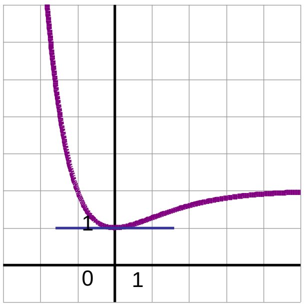
II°) La courbe ($C$) tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $\mathbb{R}$.



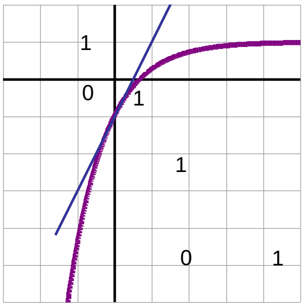

1. Au point $A(0;1)$, la courbe ($C$) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.

2. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive $F$ de la fonction $f$. Déterminer la courbe associée à la fonction $F$. (<u>en justifiant la réponse</u>)

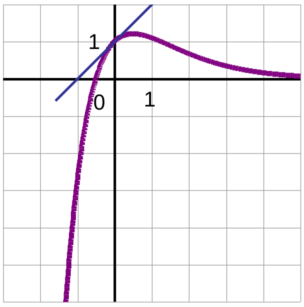
Courbe 1



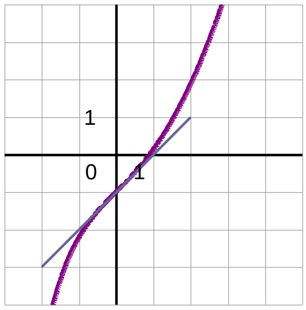

Courbe 2




Courbe 3




Courbe 4




## *<u>Exercice N°2 (5pts)</u>*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(1,-1,0) ; B(3,11) ; C(3,0,0) et D(0,1,1).

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b- En déduire que A, B et C forment un plan P.

c- Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

2) a- Calculer l'aire du triangle ABC.

b- Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c- Calculer le volume V du tétraèdre ABCD.

d- En déduire la distance de D au plan P.

3) Soit la droite Δ : $\begin{cases} x = -1-\alpha \\ y = 1+2\alpha \\ z = 1-2\alpha \end{cases}$ avec $\alpha \in IR$

a- Montrer que Δ est perpendiculaire à P.

b- Déterminer les coordonnés du point d'intersection H de P et Δ.

c- En déduire la distance de A à la droite Δ.

## Exercice N°3 : (5points)

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1) Montrer que f admet des primitives sur $[1, +\infty[$
2) Soit F la primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en 1 .Donner le sens de variation de F.
3) Soit G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = F(\frac{1}{\cos x})$.

a)Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $G'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $G(x) = \tan(x) - x$

c) Calculer F ( $\sqrt{2}$ ) et F (2)

4) Soit la fonction h définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ .Déterminer la primitive H de h sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{3}$.

## Exercice N°4 (7pts))

Le graphique ci-dessous (voir le page 4) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur]1,2] dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite d'équation x=1 est une asymptote à C.

I/1) Par lecture graphique :

a) donner $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)}{x-2}$

b) Montrer que f réalise une bijection de]1,2] sur un intervalle J. Que l'on déterminera.

c) Construire la courbe C' de $f^{-1}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à la page 4

d) **Montrer que $f^{-1}$ est derivable à droite en 0 et determiner** $\left(f_d^{-1}\right)'(0)$

2) On admet que $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$

a) Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution $\alpha$ dans] 1,2]

Vérifier que $\frac{3}{2} \prec \alpha \prec 2$

b) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Sachant que $\left|(f^{-1})'(x)\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $x \in [1,2]$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - \alpha| \prec \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$ .montrer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$|u_n - \alpha| \prec \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$

c) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite

II/ Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\tan 2x)} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[ \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $g(x) = \frac{1}{1+\cos 2x}$

2)a ) Montrer que g realise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Montrer que $g^{-1}$ est derivable sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ et $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.


y
6
5
4
3
2
1
−1
−1
0
1
2
3
4
5
x